**十年（**2014**－**2023**）年高考真题分项汇编—函数解答题**

**目录**

[**题型一：函数概念及其性质** 1](file:///D:\临时处理\刘存德\专题01%20函数及其性质（选填题）（原卷版）.docx#_Toc7254)

[**题型二：函数的零点问题 9**](file:///D:\临时处理\刘存德\专题01%20函数及其性质（选填题）（原卷版）.docx#_Toc10177)

[**题型三：函数的应用 14**](file:///D:\临时处理\刘存德\专题01%20函数及其性质（选填题）（原卷版）.docx#_Toc14635)

# 题型一：函数概念及其性质

1．(2020江苏高考·第19题)已知关于的函数与在区间上恒有．

(1)若，求的表达式；

(2)若，求的取值范围；

(3)若



求证：．

【答案】(1)；(2)；(3)证明详见解析

【解析】(1)由题设有对任意的恒成立．

令，则，所以．因此即对任意的恒成立，

所以，因此．故．

(2)令，．又．

若，则在上递增，在上递减，则，即，不符合题意．当时，，符合题意．

当时， 在上递减，在上递增，则，

即，符合题意．综上所述，．

由

当，即时，在为增函数，

因为，故存在，使，不符合题意．

当，即时，，符合题意．

当，即时，则需，解得．

综上所述，的取值范围是．

(3)因为对任意恒成立，

对任意恒成立，

等价于对任意恒成立．

故对任意恒成立

令，当，，

此时，当，，

但对任意的恒成立．

等价于对任意的恒成立．

的两根为，则，

所以．

令，则．

构造函数，，

所以时，，递减，．

所以，即．

2．(2014高考数学上海理科·第20题)设常数，函数．

(1)若，求函数的反函数；

(2)根据的不同取值，讨论函数的奇偶性，并说明理由．

**【答案】**解析：(1)因为，所以，……3分

得或，且．

因此，所求反函数为，或．……6分

(2)当时，，定义域为**R**，故函数是偶函数；……8分

当时，，定义域为，

，

故函数是奇函数；……11分

当且时，定义域关于原点不对称，故函数既不是奇函数，也不是偶函数．……14分

3．(2014高考数学广东理科·第21题)设函数，其中，

(1)求函数的定义域；(用区间表示)

(2)讨论在上的单调性；

(3)若，求上满足条件的的集合(用区间表示)．

**【答案】**解：(1)依题意有



故均有两根记为



注意到，故不等式的解集为 ，即

(2)令

则

令，注意到，故方程有两个不相等的实数根

记为，且

注意到结合图像可知

在区间上，单调递增

在区间上，单调递减

故在区间上单调递减，在区间上单调递增．

(3)

在区间上，令，即，即









方程的判别式，故此方程有4个不相等的实数根，记为

注意到，故，

，故

，故

故

结合和函数的图像

可得的解集为

附：的大致图像为

的大致图像为



4．(2015高考数学浙江理科·第18题)(本题满分15分)已知函数，记是在区间上的最大值．

(1)证明：当时，；

(2)当，满足，求的最大值．

**【答案】**(1)详见解析；(2)．

解析：

(1)分析题意可知在上单调，从而可知

，分类讨论的取值范围即可求解．；(2)分析题意可知

，再由可得，

，即可得证．

解析：(1)由，得对称轴为直线，由，得

，故在上单调，∴，当时，由

，得，即，当时，由

，得，即，综上，当时，

；(2)由得，，故，，由，得，当，时，，且在上的最大值为，即，∴的最大值为．．

5．(2015高考数学上海理科·第23题) 对于定义域为的函数，若存在正常数，使得是以为周期的函数，则称为余弦周期函数，且称为其余弦周期．已知是以为余弦周期的余弦周期函数，其值域为，设单调递增，，；

(1)验证是以为余弦周期的余弦周期函数；

(2)设，证明对任意，存在，使得；

(3)证明：“为方程在上的解”的充要条件是“为方程在上的解”，并证明对任意都有．

**【答案】**(1)见解析；(2)见解析；(3)见解析；

解析：(1)证明：，



所以是以为余弦周期的余弦周期函数；

(2)当或者时，由于单调递增，所以存在或使得成立；当，构造函数，则，，从而，所以存在，使得，即存在，使得成立，证毕．

(3)先证必要性

为方程在上的解，即，由可得，由于函数是以为余弦周期的余弦周期函数，所以，即为方程在上的解；

再证充分性

为方程在上的解，即，由可得，由于函数是以为余弦周期的余弦周期函数，所以，即为方程在上的解；

下证：对任意都有．

由于函数是以为余弦周期的余弦周期函数，所以，即有

，所以，

即或

所以或

①若，由，，可得．

所以，这与函数为增函数矛盾，舍去；

②若，由，，可得，

所以，即．

由此，对任意都有．

6．(2017年高考数学上海(文理科)·第21题)设定义在上的函数满足:对于任意的、,当时,都有．

(1)若,求的取值范围;

(2)若为周期函数,证明:是常值函数;

(3)设恒大于零,是定义在上、恒大于零的周期函数,是的最大值．函数．证明:“是周期函数”的充要条件是“是常值函数”．

**【答案】见解析**

【解析】(1)记,若,,则,∵,,∴;

(2)若是周期函数,记其周期为,任取,则有,

又由题意,对任意,,

∴,

又∵,,并且所以对任意,为常数,证毕．

(3)充分性:

若为常值函数,记,设的一个周期为,

则,则对任意,,

故是周期函数成立．

必要性:

若是周期函数,记其一个周期为．

首先证明符号不变．

(i)设集合,若存在使得,则,且对任意均有,因为,∴,

∴对任意,,恒成立,所以是常数函数．

(ii)若存在,使得,且,则由题可知,,

那么必然存在正整数使得,,∴,且,又,而,矛盾．

综上,恒成立或恒成立或恒成立．其次证明是常数函数．

(i)若恒成立．

任取,则必存在,使得,即,

∵∴

,

,

因为,,

因此若,必有,

且,

而由第(2)问证明可知对任意,为常数．

(ii)若恒成立．

任取,则必存在,使得,即,

∵∴

,

,

因为,,

因此若,必有,

且,

而由第(2)问证明可知对任意,为常数．

综上所述,必要性证毕．

7．(2016高考数学浙江理科·第18题)(本题满分15分)已知，函数，其中．

(Ⅰ)求使得等式成立的的取值范围；

(Ⅱ)(ⅰ)求的最小值；

(ⅱ)求在区间上的最大值．

**【答案】**【命题意图】本题主要考查函数的单调性与最值的求法、分段函数等基础知识，同时考查推理论证能力，分析问题和解决问题的能力．

解析：(Ⅰ)由于，故

当时，，

当时，．

所以，使得等式成立的的取值范围为．

(Ⅱ)(ⅰ)设函数，，则

，，

所以，由的定义知，即

(ⅱ)当时，，

当时，．

所以

8．已知，函数．

(1)当时，解不等式；

(2)若关于的方程的解集中恰好有一个元素，求的取值范围；

(3)设，若对任意，函数在区间上的最大值与最小值的差不超过1，求的取值范围．

**【答案】**(1)．(2)．(3)．

解析：(1)由，得

解得．

(2)，，

当时，，经检验，满足题意．

当时，，经检验，满足题意．

当且时，，，．

是原方程的解当且仅当，即；

是原方程的解当且仅当，即．

于是满足题意的．

综上，的取值范围为．

(3)当时，，

所以在上单调递减．

函数在区间上的最大值与最小值分别为，．

即，对任意成立．

因为，所以函数在区间上单调递增，时，

有最小值，由，得．

故的取值范围为．

# 题型二：函数的零点问题

1．(2020年浙江省高考数学试卷·第22题)已知，函数，其中*e*=2．71828…为自然对数的底数．

(Ⅰ)证明：函数在上有唯一零点；

(Ⅱ)记*x*0为函数在上的零点，证明：

(ⅰ)；

(ⅱ)．

**【答案】**(I)证明见解析，(II)(i)证明见解析，(ii)证明见解析．

解析：(I)在上单调递增，

，

所以由零点存在定理得在上有唯一零点；

(II)(i)，

，

令

一方面： ，

在单调递增，，

，

另一方面：，

所以当时，成立，

因此只需证明当时，

因为

当时，，当时，，

所以，

在单调递减，，，

综上，．

(ii)，

，，

，因为，所以，

，

只需证明，

即只需证明，

令，

则，

，即成立，

因此．

2．(2019·上海·第18题)已知.

(1)当时，求不等式的解集；

(2)若时，有零点，求的范围.

**【答案】**(1)；(2)

【解析】(1)当时，；

代入原不等式：；即：

移项通分：，得：；

1. 依题意：在上有解

参编分离：，即求在值域，

在单调递增，；

，故：.

3．(2016高考数学江苏文理科·第19题)已知函数．

(1)设，．

① 求方程的根；

② 若对于任意，不等式恒成立，求实数的最大值；

(2)若，，函数有且只有1个零点，求的值．

**【答案】**(1)①；②；(2)；

【官方解答】(1)因为，所以．

①方程，即，亦即，

所以，于是，解得．

② 由条件知．

因为对于恒成立，且，

所以对于恒成立．

而，且，

所以，故实数的最大值为4．

(2)因为函数只有1个零点，而，

所以0是函数的唯一零点．

因为，又由，，知，

所以有唯一解．

令，则，

从而对任意，，所以是上的单调增函数．

于是当时，；当时，．

因而函数在上是单调减函数，在上是单调增函数．

下证．

若，则，于是．

又，且函数在以和为端点的闭区间上的图象不间断，所以在和之间存在的零点，记为．

因为，所以．又，所以，与“0是函数的唯一零点”矛盾．

因此，．

若，同理可得，在和之间存在的非0的零点，矛盾．

因此，．

于是，故，所以．

民间解答：(1)① ，由可得，

则，即，则，；

② 由题意得恒成立，

令，则由可得，

此时恒成立，即恒成立，

∵时，当且仅当时等号成立，

因此实数的最大值为．

(2)，

由，可得，令，则递增，

而，因此时，

因此时，，，则；

时，，，则；

则在递减，递增，因此最小值为，

① 若，时，，，则；

log*b*2时，，，则；

因此且时，，因此在有零点，

且时，，因此在有零点，

则至少有两个零点，与条件矛盾；

② 若，由函数有且只有1个零点，最小值为，

可得，

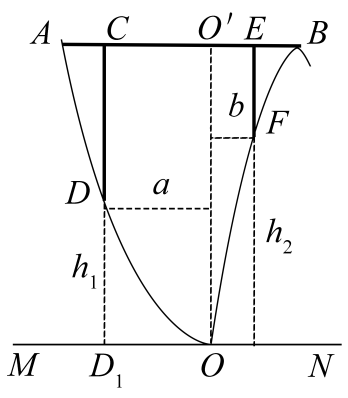
由，因此

因此，即，即，

因此，则．

# 题型三：函数的应用

1．(2020江苏高考·第17题)某地准备在山谷中建一座桥梁，桥址位置的竖直截面图如图所示：谷底在水平线上、桥与平行，为铅垂线(在上)．经测量，左侧曲线上任一点到的距离(米)与到的距离(米)之间满足关系式；右侧曲线上任一点到的距离(米)与到的距离(米)之间满足关系式．已知点到的距离为米．



(1)求桥的长度；

(2)计划在谷底两侧建造平行于的桥墩和，且为米，其中在上(不包括端点)．桥墩每米造价(万元)、桥墩每米造价(万元)()．问为多少米时，桥墩与的总造价最低?

【答案】(1)米(2)米

【解析】(1)由题意得

米

(2)设总造价为万元，，设，



(0舍去)

当时，；当时，，因此当时，取最小值，

答：当米时，桥墩与的总造价最低．

2．(2018年高考数学上海·第19题)(本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分)

某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时．某地上班族中的成员仅以自驾或公交方式通勤．分析显示：当中的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间为：

，

而公交群体的人均通勤时间不受影响，恒为40分钟．试根据上述分析结果回答下列问题：

(1)当在什么范围时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间？

(2)求该地上班族的人均通勤时间的表达式；讨论的单调性，并说明其实际意义．

**【答案】**(1)；(2)，在时单调递减，在时单调递增．实际意义为：当中的成员自驾时，该地上班族的人均通勤时间达到最小值36．875分钟．

解析：(1)由题意得且．

化简得，即．所以或．

综上所述，当时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间．

(2)①若，则．

②若，则．

所以．

当时，递减；

当时，的对称轴为，所以递减，递增．

综上所述，递减，递增．

即：当中的自驾人数比例在时，人均通勤时间随着成员自驾的比例增加而减少；当中的自驾人数比例在时，人均通勤时间随着成员自驾比例增加而增加，当中的成员自驾时，该地上班族的人均通勤时间达到最小值36．875分钟．

实际意义是：自驾人数在一定范围内增加时，交通顺畅；当随着范围进一步增加，交通拥堵，导致通勤时间增多．所以，对该地区要限制自驾人数．

3．(2015高考数学上海理科·第20题)(本题满分14分)本题共2个小题，第1小题6分，第2小题8分

如图，、、三地有直道相通，千米，千米，千米，现甲、乙两警员同时从地出发匀速前往地，经过小时，他们之间的距离为(单位：千米)．甲的路线是，速度是千米/小时，乙的路线是，速度为千米/小时．乙到达地后在原地等待，设时，乙到达地．



(1)求与的值；

(2)已知警员的对讲机的有效通话距离为千米．

当时，求的表达式，并判断在上的最大值是否超过？说明理由．

**【答案】**(1)，；(2)；最大值不超过3．

解析：(1)由题中条件可知小时，此时甲与点距离为千米，由余弦定理可知

，所以；

(2)易知，当时乙到达位置，所以

①当时，；

②当时，；综合①②，

当时，单调递减，此时函数的值域为；

当时，单调递增，此时函数的值域为；

当时，单调递减，此时函数的值域为；

由此，函数在上的值域为，而，即，

所以在上的最大值没有超过3．